EXAMEN FINAL DE JUNIO DE MÉTODOS MATEMÁTICOS III **(20-06-2017)**

APELLIDOS...**NOMBRE**..................................

CADA PROBLEMA VALE 1 PUNTO. **GRUPO 1º......**

PROBLEMA 1. Halla el **intervalo de convergencia** de la serie de potencias: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n \cdot n}$

PROBLEMA 2. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{5xy}{2x^2+3y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Razona si $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ o no.

b) Decide si $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$ y explica por qué.

PROBLEMA 3. Encuentra y clasifica los **puntos críticos** de la función $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{8}{y}$.

PROBLEMA 4. Encuentra los **extremos condicionados** de la función $f(x,y) = x + 2y$ con la restricción $x^2 + y^2 = 5$, y **clasifícalos**.

PROBLEMA 5. Calcula **el volumen** del sólido limitado por la superficie $z = x^2 - y^2$ y los planos: $z = 0$, $x = 1$, $x = 3$.

PROBLEMA 6. Calcula

$$\iint_R (x^3y)\,dxdy$$

siendo R la región de $\mathbb{R}^2$ limitada por $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$, $y = 0$.

PROBLEMA 7. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar canónico, se considera la base $B = \{(0,1,0),(0,-1,1),(-2,2,-1)\}$. Determina a partir de ella una **base ortonormal**.

PROBLEMA 8. Calcula la **proyección ortogonal** de $\underline{v} = (4,1,3,-2)$ sobre $U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

PROBLEMA 9. Responde usando el producto escalar canónico de $\mathbb{R}^2$.

a) ¿Qué ángulo forman los vectores $(2,-1)$ y $(1,-3)$?

b) ¿Para qué valor de $\alpha \in \mathbb{R}$, son ortogonales $(-4,1)$ y $(\alpha,5)$?

c) ¿Para qué valor de $\beta \in \mathbb{R}$ es unitario $(\frac{1}{2},\beta)$?

PROBLEMA 10. Escribe si las siguientes afirmaciones son **verdaderas** o **falsas** y **justifica tu respuesta**.

a) Si $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ respecto de la base $\{\underline{v_1},\underline{v_2}.\underline{v_3}\}$, entonces $\underline{v_1} \perp \underline{v_2}$ y $\underline{v_2} \perp \underline{v_3}$.

b) En las mismas condiciones del apartado anterior, se tiene que $\{\underline{v_1},\underline{v_2}.\underline{v_3}\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ para este producto escalar.

c) El crecimiento más rápido de $f(x,y) = x^2 + 3xy^2$ en el punto $(1,2)$ está en la dirección de la recta $y = x$.

d) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} 4^n$ es la serie de Maclaurin de $\cos(2x)$.

$\left(\underline{\textit{Observación}} : \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE
ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS ....

NOMBRE .... D.N.I. N.º ....

ASIGNATURA .... GRUPO ....

CURSO .... N.º DE MATRÍCULA .... FECHA ....

PROB. 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n \cdot n}$

$$\lim_n \left| \frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)}}{\frac{(x-2)^n}{3^n \cdot n}} \right| = \lim_n \left| \frac{(x-2)^{n+1} \cdot 3^n \cdot n}{(x-2)^n \cdot 3^{n+1}(n+1)} \right| =$$

$$= \lim_n \left| \frac{(x-2)n}{3(n+1)} \right| = \frac{|x-2|}{3} < 1 \Rightarrow |x-2| < 3$$

$$-3 < x-2 < 3$$

$\boxed{-1 < x < 5}$ Conv.

Si $x=-1$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ conv.

Si $x=5$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ div.

Int. de conv. $[-1, 5)$

PROB. 2 a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5xy}{2x^2+3y^2} \overset{0/0}{=} \lim_{\substack{r\to 0 \\ \alpha\in[0,2\pi)}} \frac{5r^2(\cos\alpha)(\text{sen}\,\alpha)}{2r^2\cos^2\alpha + 3r^2\text{sen}^2\alpha} =$

$= \lim_{r\to 0} \frac{5(\cos\alpha)(\text{sen}\,\alpha)}{2\cos^2\alpha + 3\text{sen}^2\alpha} = \frac{5(\cos\alpha)(\text{sen}\,\alpha)}{2\cos^2\alpha + 3\text{sen}^2\alpha}$ luego $\nexists$

b) $f(x,y)$ NO es cont. en $(0,0)$ porque $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE
ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS	
NOMBRE	D.N.I. N.º
ASIGNATURA	GRUPO
CURSO	N.º DE MATRÍCULA ... FECHA

PROB. 3 $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{8}{y}$ $\quad x \neq 0 \wedge y \neq 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y - \dfrac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow y = \dfrac{1}{x^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x - \dfrac{8}{y^2} = 0 \longrightarrow x - \dfrac{8}{\frac{1}{x^4}} = 0 \Rightarrow x - 8x^4 = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(1-8x^3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \ !! \text{ Pues } (0,y) \notin \mathrm{Dom}(f) \\ \vee \\ (1-8x^3) = 0 \Rightarrow 8x^3 = 1 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \qquad \text{PTO. CRÍTICO: } \boxed{\left(\tfrac{1}{2}, 4\right)}$$

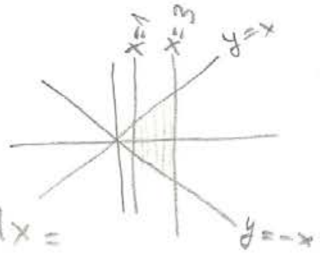
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{2}{x^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{16}{y^3}$$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{16}{y^3} \end{vmatrix} \Rightarrow H\left(\tfrac{1}{2}, 4\right) = \begin{vmatrix} 16 & 1 \\ 1 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

$$16 > 0$$

En $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ hay un MÍN. RELATIVO

PROB. 5 $z = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm x \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$



$$V = \int_1^3 \int_{-x}^{x} (x^2 - y^2)\, dy\, dx = \int_1^3 \left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_{-x}^{x} dx =$$

$$= \int_1^3 \left(x^3 - \frac{x^3}{3} + x^3 - \frac{x^3}{3}\right) dx = \int_1^3 \left(2x^3 - \frac{2}{3}x^3\right) dx = \int_1^3 \frac{4}{3} x^3\, dx =$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{4}{3}\left(\frac{3^4}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{81}{4} - \frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{80}{3}}\ u^3$$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE
ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS ....

NOMBRE .... D.N.I. N.º ....

ASIGNATURA .... GRUPO ....

CURSO .... N.º DE MATRÍCULA .... FECHA ....

PROB. 4 $\quad f(x,y)=x+2y \qquad h(x,y)=x^2+y^2-5$

$$L(x,y,\lambda)=(x+2y)+\lambda(x^2+y^2-5)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x}=1+2\lambda x=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-1}{2x} \quad (x\neq 0) \\ \frac{\partial L}{\partial y}=2+2\lambda y=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-2}{2y}=\frac{-1}{y} \quad (y\neq 0) \\ x^2+y^2=5 \end{array}\right. \quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-1}{2x}=\frac{-1}{y} \quad y=2x$$

Luego: $x^2+4x^2=5 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

PTOS. "CRÍTICOS": $(1,2)$, $(-1,-2)$

PTOS. QUE TB. HAY QUE CONSIDERAR: $(0,\sqrt{5})$, $(0,-\sqrt{5})$, $(\sqrt{5},0)$, $(-\sqrt{5},0)$

$f(1,2)=1+4=5 \longrightarrow$ MÁX. COND en $(1,2)$

$f(-1,-2)=-1-4=-5 \longrightarrow$ MÍN. COND en $(-1,-2)$

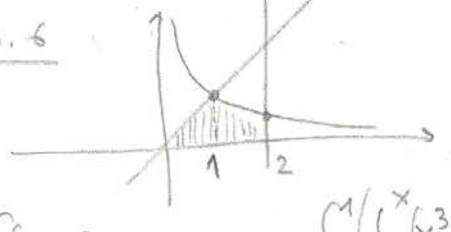
$f(0,\sqrt{5})=2\sqrt{5}$

$f(0,-\sqrt{5})=-2\sqrt{5}$

$f(\sqrt{5},0)=\sqrt{5}$

$f(-\sqrt{5},0)=-\sqrt{5}$

PROB. 6



$$\left.\begin{array}{l} y=x \\ y=\frac{1}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{1}{x} \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

$$\iint_R (x^3y)\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_0^x (x^3y)\,dy\right)dx+\int_1^2\left(\int_0^{\frac{1}{x}}(x^3y)\,dy\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^3\frac{y^2}{2}\right]_0^x dx+\int_1^2\left(x^3\frac{y^2}{2}\right]_0^{1/x}dx=\int_0^1\frac{x^5}{2}\,dx+\int_1^2\frac{1}{2}x^3\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^6}{12}\right]_0^1+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{12}+\frac{3}{4}=\frac{1+9}{12}=$$

$$=\frac{10}{12}=\boxed{\frac{5}{6}}$$

Ejercicios del ALUMNO

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

FACULTAD DE ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

APELLIDOS			
NOMBRE		D.N.I. N.º	
ASIGNATURA		GRUPO	
CURSO	N.º DE MATRÍCULA	FECHA	

PROB. 7 $\underline{v}_1 = (0,1,0)$

$$\underline{v}_2 = (0,-1,1) + \alpha \underline{v}_1 \Rightarrow \underbrace{\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2}_{0} = (0,-1,1)\cdot(0,1,0) + \alpha\, \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{(0,1,0)\cdot(0,1,0)}} = 1$$

$$\boxed{\underline{v}_2 = (0,-1,1) + (0,1,0) = (0,0,1)}$$

$$\underline{v}_3 = (-2,2,-1) + \alpha'(0,0,1) + \beta'(0,1,0)$$

$$0 = \underline{v}_2 \cdot \underline{v}_3 = (-2,2,-1)\cdot(0,0,1) + \alpha'(0,0,1)\cdot(0,0,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha' = \frac{1}{1} = 1$$

$$0 = \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_3 = (-2,2,-1)\cdot(0,1,0) + \beta'(0,1,0)\cdot(0,1,0) \Rightarrow \beta' = \frac{-2}{1} = -2$$

Luego, $\boxed{\underline{v}_3 = (-2,2,-1) + (0,0,1) - 2(0,1,0) = (-2,0,0)}$

$\|\underline{v}_1\| = 1$, $\|\underline{v}_2\| = 1$, $\|\underline{v}_3\| = \sqrt{(-2,0,0)\cdot(-2,0,0)} = \sqrt{4} = 2$

Base ortonormal: $\{(0,1,0),\ (0,0,1),\ (-1,0,0)\}$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
DE MADRID

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS

NOMBRE D.N.I. n.º

ASIGNATURA GRUPO

CURSO N.º DE MATRICULA FECHA

PROB. 8 $\mathcal{U} = \{(-x_2-x_3-x_4, x_2, x_3, x_4) / x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} =$

$= L(\{(-1,1,0,0), (-1,0,1,0), (-1,0,0,1)\})$

$\underline{v}_u = (-\alpha-\beta-\gamma, \alpha, \beta, \gamma)$

$(4,1,3,-2) - (-\alpha-\beta-\gamma, \alpha, \beta, \gamma) = (4+\alpha+\beta+\gamma, 1-\alpha, 3-\beta, -2-\gamma)$

$$\left\{\begin{array}{l} -4-\alpha-\beta-\gamma+1-\alpha=0 \Rightarrow -2\alpha-\beta-\gamma=3 \\ -4-\alpha-\beta-\gamma+3-\beta=0 \Rightarrow -\alpha-2\beta-\gamma=1 \\ -4-\alpha-\beta-\gamma-2-\gamma=0 \Rightarrow -\alpha-\beta-2\gamma=6 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 28 \end{array}\right)$$

$-8\gamma = 28 \Rightarrow \gamma = \frac{-7}{2}$ $\quad 3\beta = 1 + \frac{7}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow \beta = \frac{3}{2}$

$-2\alpha = 3 + \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \Rightarrow -2\alpha = 3-2 \Rightarrow \alpha = \frac{-1}{2}$

Por tanto, la proy. ortog. de $\underline{v}$ en $\mathcal{U}$ es:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{7}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-7}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-7}{2}\right)$$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
DE MADRID

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS		
NOMBRE	D.N.I. n.º	
ASIGNATURA	GRUPO	
CURSO	N.º DE MATRICULA	FECHA

PROB. 9

a) $(2,-1)\cdot(1,-3) = |(2,-1)|\cdot|(1,-3)|\cdot \cos\left(\widehat{(2,-1),(1,-3)}\right)$

$$\cos\left(\widehat{(2,-1),(1,-3)}\right) = \frac{2+3}{\sqrt{4+1}\,\sqrt{1+9}} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{2}\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\text{ÁNGULO} = \frac{\pi}{4}}$$

b) $(-4,1)\cdot(\alpha,5) = -4\alpha+5 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{5}{4}}$

c) $\sqrt{\left(\frac{1}{2},\beta\right)\cdot\left(\frac{1}{2},\beta\right)} = 1 \Rightarrow \frac{1}{4}+\beta^2 = 1 \Rightarrow \beta^2 = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$$\boxed{\beta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

PROB. 10

a) $\left.\begin{array}{l} \underline{V}_1\cdot\underline{V}_2 = 0 = \underline{V}_2\cdot\underline{V}_1 \Rightarrow \underline{V}_1 \perp \underline{V}_2 \\ \underline{V}_2\cdot\underline{V}_3 = 0 = \underline{V}_3\cdot\underline{V}_2 \Rightarrow \underline{V}_2 \perp \underline{V}_3 \end{array}\right\}$ VERDADERA

b) FALSA $\quad \underline{V}_1\cdot\underline{V}_3 = 2 = \underline{V}_3\cdot\underline{V}_1 \quad \underline{V}_1 \not\perp \underline{V}_3$

c) $\nabla f = (2x+3y^2,\ 6xy) \qquad \nabla f(1,2) = (14,12) \qquad 14 \neq 12$ es FALSA

d) $\cos(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{(2n)!}$ VERDADERA